

第二讲 二维涡方程与 Yudovich 理论

王国栋 哈工大数学研究院

中央民族大学 2021 年 12 月

- 二维涡方程
- Yudovich 理论
- 涡补丁及其演化

考虑二维 Euler 方程的初值问题

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, & x \in D, \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla P, & t > 0, x \in D, \\ \mathbf{v}(0, \cdot) = \mathbf{v}_0, & x \in D, \end{cases}$$

其中 D 是 $\mathbb{R}^2$ 中光滑区域 (可以无界).

对于边界条件, 为了简单我们始终假定

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad t \geq 0, x \in \partial D, \quad (1)$$

其中 $\mathbf{n}$ 表示 ∂D 单位外法向量.

当然对于无界区域, 还需对 $\mathbf{v}$ 在无穷远处加条件.

二维时 $\vec{\omega}$ 的前两个分量均为零, 我们定义 ω 为 $\vec{\omega}$ 的第三个分量, 即

$$\omega := \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1.$$

对动量方程两端求旋度, 涡方程简化为

$$\partial_t \omega + \mathbf{v} \cdot \nabla \omega = 0. \quad (2)$$

也可用 Lagrange 描述来表示

$$\omega(t, \Phi_t(x)) = \omega(0, x),$$

即涡随着流体粒子运动取值不变.

为了得到一个完全关于 ω 的方程, 我们需要用 ω 表示 $\mathbf{v}$, 这一般被称作 Biot-Savart law.

全空间的 Biot-Savart 定律

当 $D = \mathbb{R}^2$ 时 Biot-Savart 定律为

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp \psi, \quad \psi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^2} -\frac{1}{2\pi} \ln |x - y| \omega(t, y) dy, \quad (3)$$

其中 $\nabla^\perp = (\partial_2, -\partial_1)$ 表示先求梯度再顺时针旋转 90 度.

一般称 ψ 为流函数. 流线正好是 ψ 的等值线.

事实上, 由于 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, 可知 $\mathbf{v}^\perp$ 的旋度为 0, 因此 $\mathbf{v}^\perp$ 是梯度场, 即存在函数 ψ 使得

$$\mathbf{v}^\perp = -\nabla\psi,$$

亦即 $\mathbf{v} = \nabla^\perp\psi$. 不难验证 ψ 满足

$$-\Delta\psi = \omega, \quad |\nabla\psi(x)| \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow +\infty.$$

因此由 Liouville 定理可知这样的 ψ 在相差一个常数的意义下由(3)给出.

有界单连通区域的 Biot-Savart 定律

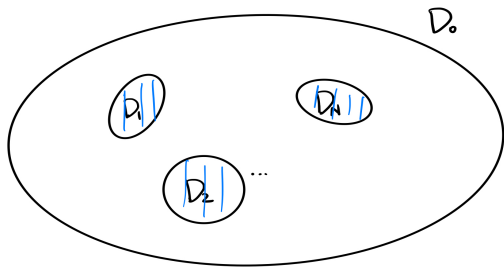
D 为有界单连通光滑区域, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial D} = 0$. 类似的方法可证明 Biot-Savart 定律为

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp \psi, \quad \psi(t, x) = \mathcal{G}\omega(t, x) := \int_D G(x, y)\omega(t, y) dy. \quad (4)$$

其中 G 是 D 内零边值 $-\Delta$ 对应的 Green 函数.

有界多连通区域的 Biot-Savart 定律

假定 $D \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界光滑区域, 满足 $D = D_0 \subset \bigcup_{i=1}^N D_i$, 其中 $D_0, D_1, \dots, D_N$ 均为 $\mathbb{R}^2$ 中有界单连通光滑区域, 且 $\overline{\bigcup_{i=1}^N D_i} \subset D_0$, $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset, \forall 1 \leq i < j \leq N$. 记 $\Gamma_i = \partial D_i, i = 0, 1, \dots, N$.



要从 ω 求解 $\mathbf{v}$, 相当于要解如下方程组

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, & x \in D, \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \omega, & x \in D, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, & x \in \partial D. \end{cases}$$

这个问题的解并不唯一. 缺什么条件呢?

回忆对于光滑解而言, 我们有 Kelvin 定理: 记 Γ_i 上流体的环量为 $a_i(t)$, 即 $a_i(t) = \oint_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r}, i = 0, 1, \dots, N$, 其中积分沿着 ∂D 正向, 则 $a_i(t) = a_0(t), \forall t \geq 0$. 因此我们总假定边界环量为固定常数, 完全由初值决定.

因此我们在上面的方程里加入新的条件

$$\oint_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = a_i, i = 1, \dots, N.$$

其中 $a_1, \dots, a_N$ 均为已知 (由于 Γ_0 上的环量 a_0 可通过 $a_1, \dots, a_N$ 以及 ω 决定, 故我们只需考虑 $\Gamma_i, i = 1, \dots, N$ 上的环量条件)

多连通区域内的 Biot-Savart 定律

令 $a_1, \dots, a_N$ 为已知常数, 则速度场 $\mathbf{v}$ 可通过如下方式由涡度 ω 唯一决定

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp \left[\mathcal{G}\omega + \sum_{i,j=1}^N q_{ij} \left(a_i - \int_D \zeta_i \omega dx \right) \zeta_j \right],$$

其中

$$(q_{ij}) = (p_{ij})^{-1}, \quad p_{ij} = - \int_D \nabla \zeta_i \cdot \nabla \zeta_j dx, \quad (5)$$

其中 $\zeta_i, i = 1, \dots, N$ 满足

$$\begin{cases} -\Delta \zeta_i = 0, & x \in D, \\ \zeta_i = \delta_{ij}, & x \in \Gamma_j, \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{cases}$$

证明.

问题等价于证明下述方程存在唯一解, 且正好由(5)给出

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, & x \in D, \\ \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1 = \omega, & x \in D, \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, & x \in \partial D, \\ \oint_{\Gamma_i} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = a_i, i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

首先由 $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, x \in D$ 以及 $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, x \in \partial D$, 可证明存在 ψ , 称为流函数, 使得

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp \psi = (\partial_2 \psi, -\partial_1 \psi).$$

容易看出 ψ 应满足

$$\begin{cases} -\Delta\psi = \omega, & x \in D, \\ \psi = \text{constant}, & x \in \Gamma_j, j = 0, 1, \dots, N, \\ \oint_{\Gamma_i} \nabla^\perp \psi \cdot d\mathbf{r} = a_i, i = 1, \dots, N. \end{cases}$$

记 $\psi_b = \psi - \mathcal{G}\omega$, 我们等价于要求解

$$\begin{cases} -\Delta\psi_b = 0, & x \in D, \\ \psi_b = \text{constant}, & x \in \Gamma_j, j = 0, 1, \dots, N, \\ \oint_{\Gamma_i} \nabla^\perp \psi_b \cdot d\mathbf{r} = a_i - \oint_{\Gamma_i} \nabla^\perp \mathcal{G}\omega \cdot d\mathbf{r} := b_i, i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (6)$$

我们只需说明 ψ_b 可以通过 $b_1, \dots, b_N$ 唯一决定 (相差常数的意义下).

为此, 令 ζ_i 为下列方程的解

$$\begin{cases} -\Delta \zeta_i = 0, & x \in D, \\ \zeta_i = \delta_{ij}, & x \in \Gamma_j, \quad j = 0, 1, \dots, N. \end{cases}$$

不难看出

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_i} \nabla^\perp \mathcal{G}\omega \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{\Gamma_i} \nabla \mathcal{G}\omega \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{\partial D} \zeta_i \nabla \mathcal{G}\omega \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \int_D \nabla \cdot (\zeta_i \nabla \mathcal{G}\omega) dx = - \int_D \nabla \zeta_i \cdot \nabla \mathcal{G}\omega dx + \int_D \zeta_i \omega dx \\ &= - \int_D \nabla \cdot (\mathcal{G}\omega \nabla \zeta_i) dx + \int_D \zeta_i \omega dx \\ &= - \int_{\partial D} \mathcal{G}\omega \nabla \zeta_i \cdot \mathbf{n} dS + \int_D \zeta_i \omega dx \\ &= \int_D \zeta_i \omega dx. \end{aligned}$$

记 $p_{ij} = - \int_D \nabla \zeta_i \cdot \nabla \zeta_j dx$. 容易验证 (p_{ij}) 是负定对称矩阵, 从而存在逆矩阵 (p_{ij}) .

为求解(6), 我们待定 $\psi_b = \sum_{j=1}^N \beta_j \zeta_j$, 则只需要 β_i 满足

$$\sum_{i=1}^N \beta_j p_{ij} = b_i$$

即可. 因此只需取

$$\beta_i = \sum_{j=1}^N q_{ij} b_j.$$

唯一性也是显然的, 事实上当 $b_i = 0, i = 1, \dots, N$ 时, 很容易看出(6)只有常数解 (否则与 Hopf 引理矛盾).

目前二维涡方程的存在性结果有：

- $\omega_0 \in C^\alpha$, Wolibner, 1934;
- $\omega_0 \in L^\infty$, Yudovich, 1963;
- $\omega_0 \in L^p, p \in (1, +\infty)$, DiPerna&Majda, 1987;
- ω_0 为 H^{-1} 中非负 Radon 测度, Delort, 1991.

关于唯一性, 只有 $\omega_0 \in L^\infty$ 有较为满意的结果.

关于“坏解”不唯一, 甚至违反直觉的例子 (Scheffer): 一个二维流体在初始时刻是静止的, 但在之后的某一时刻突然运动起来, 随后又在某一时刻恢复静止.

下面我们叙述 Yudovich 的结果. 为了简单起见我们假定 D 是一个有界单连通光滑区域.

Yudovich 定理 (现代版本)

令 $\omega_0 \in L^\infty(D)$, 则存在三元组 $(\omega(t, x), \Phi_t(x), \mathbf{v}(t, x))$, 满足

- (i) $\omega \in L^\infty((0, +\infty); D)$;
- (ii) 对固定的 $t \geq 0$, Φ_t 是 $\bar{D} \rightarrow \bar{D}$ 的可逆映射, 满足: 若 $x \in D$, 则 $\Phi_t(x), \Phi_t^{-1}(x) \in D, \forall t \geq 0$, 若 $x \in \partial D$, 则 $\Phi_t(x), \Phi_t^{-1}(x) \in \partial D, \forall t \geq 0$;
- (iii) 对固定的 $x \in \bar{D}$, $\Phi_t(x), (\Phi_t)^{-1}(x) \in C^1([0, +\infty); \bar{D})$;
- (iv) 对固定的 t , Φ_t, Φ_t^{-1} 是 $\bar{D} \rightarrow \bar{D}$ 的同胚 (连续双射), 同时也是保测度的可测映射;
- (v) 对固定的 $T > 0$, $\Phi, \Phi^{-1} \in C^\alpha([0, T] \times \bar{D})$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$ 只依赖于 T 与 $\|\omega_0\|_{L^\infty(D)}$;

(vi) $\mathbf{v} \in C([0, +\infty) \times \bar{D})$, 且

$$\|\mathbf{v}\|_{L^\infty((0, \infty) \times D)} \leq C\|\omega_0\|_{L^\infty(D)},$$

$$|\mathbf{v}(t, x) - \mathbf{v}(t, y)| \leq C\|\omega_0\|_{L^\infty(D)}\phi(|x - y|), \quad \forall t \in [0, +\infty),$$

其中 C 为只依赖于 D 的正常数, ϕ 的定义如下

$$\phi(r) = r(1 - \ln r), \quad 0 \leq r < 1; \phi(r) = 1, \quad r \geq 1;$$

(vii) $(\omega(t, x), \Phi_t(x), \mathbf{v}(t, x))$ 合起来满足

$$\mathbf{v} = \nabla^\perp \mathcal{G}\omega; \quad \omega(t, x) = \omega_0(\Phi_t^{-1}(x));$$

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(x) = \mathbf{v}(t, \Phi_t^n(x)), \quad \Phi_0(x) = x;$$

最后, 满足上述条件的三元组 $(\omega(t, x), \Phi_t(x), \mathbf{v}(t, x))$ 是唯一的.

在证明之前, 我们先给出几个注记.

注 1: 由 Φ_t 保测度可知 $\omega(t, \cdot) \in \mathcal{R}_{\omega_0}, \forall t \geq 0$. 特别地,

$$\|\omega(t, \cdot)\|_{L^p(D)} = \|\omega_0\|_{L^p(D)}, \forall t \geq 0, p \in [1, +\infty).$$

注 2: 容易验证 $\omega(t, \cdot) \rightarrow \omega_0$ in $L^p(D), \forall p \in [1, +\infty)$. 事实上, 对任意的 $\eta \in C_c^\infty(D)$ 以及序列 $\{t_n\}, t_n \rightarrow 0$, 我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_D \omega(t_n, x) \eta(x) - \omega_0(x) \eta(x) dx \right| &= \left| \int_D \omega_0(\Phi_{t_n}^{-1}(x)) \eta(x) - \omega_0(x) \eta(x) dx \right| \\ &= \left| \int_D \omega_0(x) \eta(\Phi_{t_n}(x)) - \omega_0(x) \eta(x) dx \right| \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

因此 $\omega(t_n, \cdot)$ 在 $L^p(D), p \in (1, +\infty)$ 中弱收敛到 ω_0 . 结合

$\|\omega(t_n, \cdot)\|_{L^p(D)} = \|\omega_0\|_{L^p(D)}$ 即得 $\omega(t_n, \cdot) \rightarrow \omega_0$ in $L^p(D), p \in (1, +\infty)$. 对 $p = 1$ 由 D 是一个有界区域即得.

注 3: 重复注 2 的论证可得 $\omega \in C([0, +\infty); L^p(D)), \forall p \in [1, +\infty)$.

注 4: ω 实际是 $\partial_t \omega + \nabla \cdot (\mathbf{v}\omega) = 0$ 的分部积分意义下的弱解, 即对 $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times D)$ 成立

$$\int_D \omega_0(x) \phi(0, x) dx + \int_0^{+\infty} \int_D \omega (\partial_t \phi + \nabla \phi \cdot \mathbf{v}) dx dt = 0.$$

事实上,

$$\begin{aligned} \int_D \omega(t, x) \partial_t \phi(t, x) dx &= \int_D \omega_0(\Phi_t^{-1}(x)) \partial_t \phi(t, x) dx \\ &= \int_D \omega_0(x) \partial_t \phi(t, \Phi_t(x)) dx \\ &= \int_D \omega_0(x) \left(\frac{d}{dt} \phi(t, \Phi_t(x)) - (\nabla \phi \cdot \mathbf{v})(t, \Phi_t(x)) \right) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_D \omega(t, x) \phi(t, x) dx - \int_D \omega(t, x) (\nabla \phi \cdot \mathbf{v})(t, x) dx. \end{aligned}$$

两端关于 t 在 $(0, +\infty)$ 上积分即可.

注 5: 对任意的 $\phi \in C^1(\bar{D})$, $\int_D \omega \phi dx \in C^1[0, +\infty)$ 且

$$\frac{d}{dt} \int_D \omega \phi dx = \int_D \omega \mathbf{v} \cdot \nabla \phi dx.$$

事实上, 由于 Φ_t 是保测度的变换, 故

$$\int_D \omega \phi dx = \int_D \omega_0(x) \phi(\Phi_t(x)) dx.$$

再注意到 $\Phi_t(x)$ 关于 t 是 C^1 的, 故上面的积分关于 t 是 C^1 的, 且

$$\frac{d}{dt} \int_D \omega_0(x) \phi(\Phi_t(x)) dx = \int_D \omega_0(x) \nabla \phi(\Phi_t(x)) \cdot \mathbf{v}(t, \Phi_t(x)) dx = \int_D \omega \mathbf{v} \cdot \nabla \phi dx.$$

注 6: 当 $D = \mathbb{R}^2$, $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty(D)$ 时, 类似的存在唯一性结果也成立, 证明更为简单.

Yudovich 原始的证明对 2D Navier-Stokes 方程做粘性消失得到的.

下面我们采取更现代一点的证明方法, 即是通过下面迭代格式构造逼近解序列 $(\omega^n, \Phi_t^n, \mathbf{v}^n)$

$$\omega^0 = \omega_0, \quad (7)$$

$$\mathbf{v}^n = \nabla^\perp \mathcal{G} \omega^{n-1}, \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^n(x) = \mathbf{v}^n(t, \Phi_t^n(x)), \quad \Phi_0(x) = x, \quad (9)$$

$$\omega^n(t, x) = \omega_0((\Phi_t^n)^{-1}(x)), \quad (10)$$

然后在适当的函数空间做一致估计, 最后证明逼近解序列的收敛性.

要通过上面的迭代格式构造逼近解序列，遇到的第一个问题是(9)是否有解？

注意：对于 $\omega \in L^\infty(D)$, $\mathbf{v} = \nabla^\perp \mathcal{G}\omega \in W^{1,p}(D), \forall p \in (1, +\infty)$, 进而由 Morrey 嵌入定理知 $\mathbf{v} \in C^\alpha(\bar{D}), \forall \alpha \in (0, 1)$. 但是常微分方程的存在性定理要求 $\mathbf{v}$ 关于空间变量的 Lipschitz 连续性才能保证(9)唯一可解！

Yudovich 理论中最重要的一点是速度场关于空间变量不仅是 Hölder 连续的, 还是 log-Lipschitz 的.

log-Lipschitz 估计

令 $\omega \in L^\infty(D)$, $\mathbf{v} = \nabla^\perp \mathcal{G}\omega$, 则

$$\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(D)} \leq C_1 \|\omega\|_{L^\infty(D)},$$

$$|\mathbf{v}(x) - \mathbf{v}(y)| \leq C_2 \|\omega\|_{L^\infty(D)} \phi(|x - y|),$$

其中 C_1, C_2 均为只依赖于 D 的正常数.

注意 ϕ 不是 Lipschitz 连续的, 但是对任意的 $\alpha \in (0, 1)$ 是 C^α 连续的. 这意味着速度常 $\mathbf{v}$ 的正则性介于 Hölder 连续和 Lipschitz 连续之间. 事实上可以证明 log-Lipschitz 已经是速度场的最佳正则性了.

log-Lipschitz 向量场对应的 ODE 解的存在唯一性

令 D 为 $\mathbb{R}^2$ 中一有界光滑区域, 向量场 $\mathbf{b}(t, x)$ 满足

$$\mathbf{b} \in C([0, +\infty) \times \bar{D}; \mathbb{R}^2),$$

$$|\mathbf{b}(t, x) - \mathbf{b}(t, y)| \leq C\phi(|x - y|),$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}|_{\partial D} = 0,$$

其中 C 是一个正常数, $\mathbf{n}$ 为 ∂D 的单位外法向量. 则对任意给定的 $x_0 \in \bar{D}$, 如下的 Cauchy 问题有唯一整体 C^1 解

$$\frac{dx}{dt} = \mathbf{b}(t, x), \quad x(0) = x_0.$$

此外, 若 $x_0 \in D$, 则 $x(t) \in D, \forall t \geq 0$; 若 $x_0 \in \partial D$, 则 $x(t) \in \partial D, \forall t \geq 0$.

证明的方法与 Lipschitz 向量场情形几乎相同, 即采用 Picard 迭代.

注意如果向量场仅是 Hölder 连续但不是 log-Lipschitz 的, 则 ODE 的解存在 (Peano) 但未必唯一. 比如

$$\frac{dx}{dt} = x^{1/2}, \quad x(0) = 0$$

有两个解, 第一个是平凡解 $x(t) \equiv 0$, 第二个是

$$x(t) = \frac{t^2}{4}.$$

有了上述两个引理, 不难证明迭代序列的定义是合理的, 并且 Φ_t^n 有逆映射 $(\Phi_t^n)^{-1}$.

下面是关于 Φ^n 和 $(\Phi^n)^{-1}$ 的一致估计.

一致 Hölder 估计

对给定的 $T > 0$, 存在 $\alpha \in (0, 1)$, α 只依赖于 T 和 $\|\omega\|_{L^\infty(D)}$ 使得

$$\Phi^n \in C^\alpha([0, T] \times \bar{D}), \quad (\Phi^n)^{-1} \in C^\alpha([0, T] \times \bar{D}),$$

且 $\{\Phi_n\}$ 和 $\{(\Phi_n)^{-1}\}$ 均为 $C^\alpha([0, T] \times \bar{D})$ 中的有界序列.

由于 $\nabla \cdot \mathbf{v}^n$ 在分布意义下为 0, 还可证明:

保测度性

对任意的 $t \geq 0$, Φ_t^n 和 $(\Phi_t^n)^{-1}$ 都是保测度的可测映射.

由 Arzela-Ascoli 定理可得 $\{\Phi^n\}$ 在 $C([0, T] \times \bar{D})$ 中收敛到某个 Φ . 不难验证 Φ 可逆且

$$\Phi \in C^\alpha([0, T] \times \bar{D}), \quad (\Phi)^{-1} \in C^\alpha([0, T] \times \bar{D}).$$

此外, 对固定的 t , Φ_t 是同胚, 且 Φ_t, Φ_t^{-1} 都是保测度的可测映射.

最后定义

$$\omega(t, x) = \omega_0(\Phi_t^{-1}(x)), \quad \mathbf{v}(t, x) = \nabla^\perp \mathcal{G}\omega.$$

可验证对固定的 t , $\mathbf{v}^n$ 在 $\bar{D}$ 中一致收敛到 $\mathbf{v}$, 进而可验证 $(\omega, \Phi, \mathbf{v})$ 是解.

唯一性也基于 log-Lipschitz 性质:

假设有两个解, 对应的流映射为 Φ_t^1, Φ_t^2 . 令

$$\eta(t) = \frac{1}{|D|} \int_D |\Phi_t^1(x) - \Phi_t^2(x)| dx.$$

利用 log-Lipschitz 条件进行放缩可得到 Gronwall 型不等式, 进而可得 $\eta(t) \equiv 0$.

除了涡守恒，弱解也满足能量守恒.

弱解的动能守恒

令 ω 为涡方程的唯一解，则流体的动能

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_D |\mathbf{v}(t, x)|^2 dx = \frac{1}{2} \int_D \omega(t, x) \mathcal{G} \omega(t, x) dx$$

是守恒量.

涡的转动惯量守恒

令 D 为 $\mathbb{R}^2$ 或以原点为心的圆盘, 则转动惯量

$$J(t) := \int_D |x|^2 \omega(t, x) dx$$

是守恒量.

涡的转动惯量守恒

令 $D = \mathbb{R}^2$, 则涡中心

$$X(t) := \int_D x \omega(t, x) dx$$

是守恒量.

弱解的正则性

当初值 ω_0 有更好的正则性时, 相应的解 $(\omega, \Phi_t, \mathbf{v})$ 关于空间变量也有更好的正则性.

弱解关于空间变量正则性的提升

令 $\omega_0 \in C^k(\bar{D})$, $k \geq 1$, $T > 0$, 则对任意的 $t \in [0, T]$, 相应的解满足:

- (i) $\omega(t, \cdot) \in C^k(\bar{D})$;
- (ii) $\Phi_t(\cdot) \in C^{k, \alpha(T)}(\bar{D})$;
- (iii) $\mathbf{v} \in C^{k, \beta}(\bar{D})$, $\forall \beta \in (0, 1)$, 且 $\mathbf{v}$ 的全部 k 阶偏导数都是 log-Lipschitz 连续的.

证明采用归纳法: 当 $\omega_0 \in C^1(\bar{D})$ 时, 由于 $\Phi_t \in C^{\alpha(T)}(\bar{D})$, 故 $\omega \in C^{\alpha(T)}(\bar{D})$. 利用 Schauder 估计可知 $\mathbf{v} \in C^{1, \alpha(T)}(\bar{D})$. 由此可进一步证明 $\Phi_t \in C^{1, \alpha(T)}(\bar{D})$, 进而 $\omega(t, \cdot) \in C^1(\bar{D})$.

根据 Yudovich 的结果, 若 ω_0 为分片常数, 则在每一时刻 $\omega(\cdot, t)$ 都是分片常数, 这种解就被称为涡补丁 (vortex patch). 涡补丁的一般形式为

$$\omega_t = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_{i,t}}.$$

若一个涡补丁不随时间改变, 则称之为定常涡补丁.

- Rankine 涡. $D = \mathbb{R}^2$ 时 χ_B 是一个定常涡补丁, 其中 χ 为特征函数, B 为一个圆盘;
- Kirchhoff 椭圆涡补丁. $D = \mathbb{R}^2$ 时一个半轴为 a 和 b 的椭圆盘会以 $\Omega_{a,b} = ab/(a+b)^2$ 为角速度旋转.

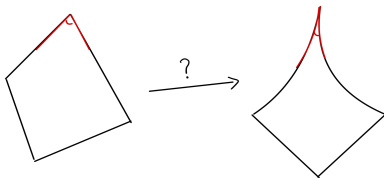
涡补丁的演化问题

Q1: 涡补丁边界正则性. 考虑涡补丁解 $\omega_t = \chi_{A_t}$, 如果 A_0 的边界具备一定的正则性, A_t 是否会保持同样的正则性? 能保持多久?

已知的结果有

- 1986, Majda 通过类比一个一维模型, 猜测即使初始时刻涡补丁边界光滑, 也可能在有限时间演化出奇性;
- 1993, Chemin 否定了 Majda 的猜测, 他证明了涡补丁在演化时会保持 $C^{k,\alpha}$ 正则性, $k \geq 1, \alpha \in (0, 1)$. 不随后 Bertozzi, Constantin 对这一结果给出了简化证明;
- 1999, Depauw 考虑了有边界情形, 但当涡补丁接触边界时仅在某有限时间段内保持正则性;
- 2003, Dutrifoy 初始涡补丁接触边界时保持 Hölder 正则性, 但 Hölder 指数可能会降低;
- 2016, Kiselev, Ryzhik, Yao, Zlatoš 证明了即使接触边界也不会降低正则性, 并且允许有多个涡补丁;
- 2019, Kiselev, Li 证明了有界区域允许多个涡补丁情形, 允许接触边界.

公开问题: 涡补丁边界能否保持 C^1 或 Lipschitz 正则性? 能否找出 corner 演化成 cusp 的例子?



Q2: 涡补丁支集大小增长速度问题. 对于涡补丁解 $\omega_t = \chi_{A_t}$, 如果 A_0 具有紧支集, 则由速度场的有界性知 A_t 的支集大小至多是 $O(t)$ 增长. 利用涡守恒可证明 $x \cdot v \in L^\infty$, 进而又可得到至多 $O(t^{1/2})$ 的增长. 一个有意思的问题是: 最优的增长阶是多少?

已知的结果有:

- 1994, Marchioro, $O(t^{1/3})$;
- 1996, Marchioro, 外区域, $O(t^{1/2+\varepsilon})$;
- 1998, F. Lopes, H. Lopes, 将 Marchioro 涡补丁的结果推广到非负紧支集 L^p 函数, $p \in (2, +\infty]$;
- 1999, Iftimie, Sideris, Gamblin, $O((t \ln t)^{1/4})$, 至今为止最好的界;
- 2019, Choi, Denisov, 条状区域, $O(t^{1/3} \ln^2 t)$;

公开问题: 能否找到最优的界? 能否举出支集跑到无穷远的例子? (目前一个例子都没有)

Q3: 旋转涡补丁对称性问题. 当 $D = \mathbb{R}^2$ 或 D 是一个圆心在原点的圆盘时, 有一类特殊的涡补丁解, 即 旋转涡补丁解.

更确切地说, 如果 ω 满足 $\omega(\cdot, t) = I_{A_t}$, $A_t = e^{i\Omega t} A$ 是 Euler 方程的一个涡补丁解, 其中 Ω 为固定常数, $A \subset D$ 为一固定可测集, 则称 ω 是一个角速度为 Ω 的旋转涡补丁解. 这里 $e^{i\theta} A$ 表示将集合 A 逆时针旋转 θ 角度.

旋转涡补丁的例子:

- 定常涡补丁, 包括圆盘 (Rankine 涡), 圆环, 或者任意旋转不变的可测集, 此时对应的角速度可以为任意实数;
- Kirchhoff 椭圆涡补丁. 当 $D = \mathbb{R}^2$ 时, **目前唯一有解析表达式的角速度不为 0 的旋转涡补丁解** 是由 Kirchhoff 在 1874 发现的: 一个长短轴分别为 a 和 b , $a \neq b$, 中心在原点的椭圆涡补丁以角速度 $\Omega = \frac{ab}{(a+b)^2} \in (0, \frac{1}{4})$ 绕着原点旋转.

其它一些不存在解析表达式的旋转涡补丁解:

- 当 $D = \mathbb{R}^2$ 时 Deem-Zabusky 在 1978 年通过数值方法揭示了具有 D_m 对称性的单连通旋转涡补丁的存在性, 其中 D_m 为二面体群, $m = 3, 4, 5$;
- 当 $D = \mathbb{R}^2$ 时 Burbea 在 1982 年严格证明了具有 D_m 对称性的单连通旋转涡补丁的存在性, 角速度 $\Omega_m = \frac{m-1}{2m}$, $m \geq 2$;
- 当 $D = \mathbb{R}^2$ 时 de la Hoz-Hmidi-Mateu-Verdera 在 2016 年证明了具有 D_m 对称性的双连通旋转涡补丁的存在性, 角速度 $\Omega_m \in (0, \frac{1}{2})$;
- 当 D 为圆盘时, de la Hoz-Hassainia-Hmidi-Mateu 在 2016 年证明了圆盘内具有 D_m 对称性的单连通和双连通旋转涡补丁的存在性, 角速度 $\Omega_m \in (0, \frac{1}{2})$;

显然, 除了径向对称的涡补丁 (此时旋转角速度可以为任意实数), 前面提到的旋转涡补丁的角速度均在开区间 $(0, \frac{1}{2})$ 中. 一个自然的问题是: 如果一个旋转涡补丁的角速度满足 $\Omega \leq 0$ 或 $\Omega \geq \frac{1}{2}$, 是否一定是径向对称的?
已知的两个结果是

- 当 $D = \mathbb{R}^2$ 时 Hmidi 在 2015 年证明了任何 C^1 单连通的旋转涡补丁, 如果角速度 $\Omega = \frac{1}{2}$, 或者 $\Omega < 0$ 同时此旋转涡补丁满足一定的凸性条件, 则一定是圆盘. 证明采用了移动平面法.
- Gómez-Serrano–Park–Shi–Yao 在 2019 年证明了 $D = \mathbb{R}^2$ 时任何 C^1 旋转涡补丁 (可以是多连通的), 如果角速度 $\Omega \leq 0$ 或 $\Omega \geq \frac{1}{2}$, 则一定是径向对称的.

猜想: 当 D 是一个圆盘时, 是否满足角速度 $\Omega \leq 0$ 或 $\Omega \geq \frac{1}{2}$ 的旋转涡补丁一定是径向对称的?

一个不完整的结果如下:

定理 (Wang-Zuo, 2020)

如果 D 是 $B_1(0)$ (圆心在原点半径为 1 的圆盘) 内的一个 C^1 单连通旋转涡补丁, 角速度满足: $\Omega \leq 0$ 或 $\Omega \geq \max\{\frac{1}{2}, \frac{2r^2}{(1-r^2)^2}\}$, 其中 $r = \sup_{x \in D} |x| < 1$, 则 D 一定是一个圆心在原点半径为 r 的圆盘.

注: 全空间的旋转涡补丁解一定是绕着涡中心旋转的 (根据涡中心守恒), 但是圆盘内不一定.